

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ**  
**DEPARTAMENTO DE TEORIA E PRÁTICA DA EDUCAÇÃO**

**ANÁLISE DE ERROS DE ALUNOS DO QUARTO ANO EM**  
**PROBLEMAS ADITIVOS**

**FABIANE LARISSA DA SILVA VARGAS**

**MARINGÁ**  
**2014**

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ**  
**DEPARTAMENTO DE TEORIA E PRÁTICA DA EDUCAÇÃO**

**ANÁLISE DE ERROS DE ALUNOS DO QUARTO ANO EM  
PROBLEMAS ADITIVOS**

Trabalho de conclusão de curso apresentado por  
FABIANE LARISSA DA SILVA VARGAS ao  
Departamento de Teoria e Prática da Educação, da  
Universidade Estadual de Maringá, como requisito  
parcial para a obtenção do grau acadêmico de  
licenciado em Pedagogia.

Orientadora:  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> OLINDA TERUKO KAJIHARA

MARINGÁ  
2014

## ANÁLISE DE ERROS DE ALUNOS DO QUARTO ANO EM PROBLEMAS ADITIVOS

Fabiane Larissa da Silva Vargas<sup>1</sup>  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Olinda Teruko Kajihara<sup>2</sup>

### Resumo

Este trabalho teve como objetivo analisar os erros cometidos por alunos do quarto ano do Ensino Fundamental, na resolução de problemas matemáticos aditivos de transformação, de combinação, de comparação e de composição. Foram selecionadas, aleatoriamente, 21 atividades realizadas por 21 escolares que participaram de um estudo do Grupo de Pesquisa “Ensino, Aprendizagem e Avaliação Escolar”, da Universidade Estadual de Maringá - Paraná. Entre as 273 situações aditivas realizadas pelo grupo, 28,49% (n = 77) foram resolvidas incorretamente. Os escolares tiveram maior dificuldade nos problemas de comparação, e menor dificuldade nos de combinação. O principal tipo de erro cometido pelo grupo na resolução das situações foi o de interpretação (39%), decorrente do uso de conceitos-em-ação não pertinentes e de teoremas-em-ação falsos.

**Palavras-chave:** Campo conceitual aditivo. Problemas aditivos. Ensino Fundamental. Educação.

### ANALYSIS OF FOURTH YEAR STUDENTS' ERRORS IN ADDITIVE PROBLEMS

Current research analyzes errors of fourth year of the elementary school children in the solution of mathematical additive problems comprising transformation, combination, comparison and composition. Twenty-one activities were randomly selected by 21 pupils who participated in a study of the Research Group “Teaching, Learning and Evaluation in the School” at the State University of Maringá, Maringá - PR - Brazil. Within the context of 273 addition cases performed by the group, 28.49% (n = 77) were solved incorrectly. The children had their greatest difficulty in comparison problems and their smallest in combination ones. Interpretation error was the principal mistake type committed by the group (39%) due to the use of non-pertaining concepts-in-action and to false theorems-in-action in the solution of the additive problems.

**Keywords:** Additive conceptual field. Additive problems. Elementary school. Education.

---

<sup>1</sup> Acadêmica do Curso de Pedagogia da Universidade Estadual de Maringá – Paraná.

<sup>2</sup> Orientadora. Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> do Departamento de Teoria e Prática da Educação, da Universidade Estadual de Maringá.

## 1 INTRODUÇÃO

Na vida moderna, aprender a calcular, a medir e a tratar informações, de forma estatística, é fundamental para a formação das crianças, para que possam exercer a cidadania (BRASIL, 1997). No entanto, avaliações educacionais, como as realizados pelo Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (SARESP), revelam que ainda estamos longe de um nível de proficiência adequado: em 2011, apenas 28,1% dos alunos do quinto ano do Ensino Fundamental apresentaram desempenho adequado, ou seja, foram capazes de “estabelecer relações entre medidas, de calcular (adição, subtração, multiplicação, divisão, áreas), de compreender conceitos”, de extrair “informações a partir de dados apresentados em gráficos”, de resolver problemas e de determinar “a medida do perímetro de uma figura” (SÃO PAULO, 2011, p. 76).

Em nível nacional, resultados da Prova Brasil, do Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb), do ano de 2011, demonstraram que apenas 30,1% dos alunos do quinto ano apresentavam nível de proficiência considerado adequado, isto é, “domínio pleno dos conteúdos, competências e habilidades desejáveis” para esse nível de escolaridade (SÃO PAULO, 2011, p. 65).

Esses resultados são a expressão de uma crise no ensino da Matemática, que é antiga. Ao longo do século XX, governos e especialistas esforçaram-se para melhorar a qualidade do ensino dessa disciplina. As ideias do professor Euclides de Medeiros Guimarães Roxo, por exemplo, influenciaram as reformas no ensino da Matemática que ocorreram, nas décadas de 1930 e 1940 (CARVALHO et al., 2000).

Roxo foi diretor do renomado Colégio Pedro II, do Rio de Janeiro, de 1925 a 1935. Em 1937, assumiu o cargo de diretor do Ensino Secundário, no Ministério da Educação e Saúde. Foi, também, membro do Conselho Nacional de Educação e presidente da Comissão Nacional do Livro Didático (CARVALHO et al., 2000). Os conteúdos ministrados no Colégio Pedro II serviram de base, naquela época, para a elaboração de livros didáticos (SOUZA, 2010).

Durante sua gestão como diretor, Roxo propôs, na reunião dos professores do dia 14 de novembro de 1927, a reforma do ensino da Matemática do Colégio Pedro II (WERNECK, 2003). Ele fundamentou-se nas ideias: do movimento escolanovista e, por isso, defendeu que o ensino deveria estar mais próximo da realidade dos alunos; e do matemático alemão Félix Klein, o que levou-o a propor o ensino conjunto da Aritmética, da Álgebra e da Geometria (CARVALHO et al., 2000).

Como é possível observar na Ata (1927 apud WERNECK, 2003, p. 40-41) da reunião da Congregação do Colégio Pedro II, ocorria no dia 14 de novembro de 1927, transcrita abaixo, Roxo propôs que as disciplinas de Aritmética, Álgebra e Geometria deixassem de ser ministradas separadamente, cada uma em um ano do Curso Secundário, e passassem a ser ministradas do primeiro ao quarto ano, sob a denominação de Matemática.

[...] Considerando que urge adotar entre nós os métodos de ensino da Matemática elementar introduzida pela grande reforma que o professor Klein iniciou na Alemanha há cerca de 30 anos e que já se acham adotados em quase todos os países civilizados do mundo; Considerando que um dos pontos capitais da nova orientação está em acabar com a divisão da ciência Matemática em partes distintas e separadas (Aritmética, Álgebra, Geometria); Considerando que, à luz das modernas idéias [*sic*] pedagógicas, "a ciência Matemática sob as suas três faces, numérica, simbólica e gráfica - é uma só e não é conveniente, sob o ponto de vista didático, separá-la por divisões estanques ou dogmáticas, em Aritmética, Álgebra e Geometria, mas antes convém, tanto quanto possível, expor os mesmos princípios sob os três pontos de vista, dando forma concreta ao ensino, procurando, em uma palavra, fazer entrar a Matemática 'pelos olhos' até que o aluno se ache bastante exercitado para tratar as questões de um modo abstrato", (Jorge Duclout [*sic*], prof. da Faculdade de Ciência e da Escola Normal de Buenos Aires); Considerando que "a Matemática é uma verdadeira unidade, e como tal, deve ser desenvolvida desde o começo sendo a Geometria o fluído unificador (uniting fluid) que corre através do conjunto"(Benchara Branford). Considerando que a atual seriação das matérias Aritmética, Álgebra e Geometria no curso do Colégio Pedro II é, como se vê antiquada pois não permite a adoção da orientação pedagógica atualmente aceita em quase todo o mundo; e que, em anos anteriores o curso já foi feito sob a denominação única de Matemática. Indicamos que a congregação do Colégio Pedro II usando das atribuições que lhe confere o Art. 195, letra g, do decreto 167 - 82A de 13 de janeiro de 1925 proponha ao Governo modificar a distribuição das matérias do curso secundário do seguinte modo: '1º o estudo da Aritmética, Álgebra, Geometria Trigonometria se fará sob a denominação única de Matemática - do 1º ao 4º ano do curso; 2º haverá exame de promoção de Matemática no 1º ano, no 2º e no 3º e exame final no 4º ano' (ER. T. 3. 183). Sala das Sessões, 14 de novembro de 1927. [...]"

A ideia de Roxo, de ensino da Aritmética, da Álgebra e da Geometria, em todas as séries do currículo, sem uma rígida separação, implantada no Colégio Pedro II, em 1929, é aceita até hoje, no ensino da Matemática (CARVALHO et al., 2000).

A década de 1930 foi marcada, na Matemática, pela Reforma de Francisco Campos (SOARES; DASSIE; ROCHA, 2004). A sociedade brasileira vivenciou, naquela época, a Revolução de 30, ou seja, um movimento armado, liderado pelos estados de Minas Gerais, Paraíba e Rio Grande do Sul, que culminou com o Golpe de Estado que depôs o presidente Washington Luís e impediu a posse do presidente eleito Julio Prestes. Os governos paulista e

mineiro haviam rompido a Política do Café com Leite, e Getúlio Vargas, apoiado pelo governo de Minas Gerais, tomou o poder (FERREIRA; PINTO, 2006).

Em seu governo provisório, Getúlio Vargas criou dois novos ministérios: o da “Educação e Saúde” e o do “Trabalho, Indústria e Comércio”. O presidente nomeou como Ministro da Educação e Saúde, o mineiro Francisco Campos (1891-1968), por sua atuação como Secretário do Interior, no governo de Antônio Carlos, de Minas Gerais (SOARES; DASSIE; ROCHA, 2004).

Em 18 de abril de 1931, Francisco Campos, influenciado pelos ideais do movimento escolanovista, implantou mudanças no Ensino Secundário, por meio do Decreto nº 19.890, de 18 de abril de 1931, e que foram consolidadas por meio do Decreto nº 21.241, de 4 de abril de 1932. A Reforma de Francisco Campos propôs que o Curso Secundário deixasse de ser propedêutico e passasse a preparar para o ingresso no Ensino Superior. Além disso, passaria a ter sete anos, divididos em duas partes: a primeira, comum ou fundamental, teria a duração de cinco anos, e a segunda, preparatória para o Ensino Superior, teria a duração de dois anos (SOARES; DASSIE; ROCHA, 2004).

A Reforma de Francisco Campos tentou adequar-se às ideias vigentes naquela época. Por exemplo, a divisão do Curso Secundário estava em concordância com a proposta feita pela Seção de Ensino Secundário, do Departamento Carioca da Associação Brasileira de Educação. Em relação à Matemática, essa Reforma apropriou-se das ideias de Euclides Roxo, colocadas em prática no Colégio Pedro II (SOARES; DASSIE; ROCHA, 2004).

Em julho de 1934, Gustavo Capanema substituiu Francisco Campos no Ministério da Educação e Saúde, e deu continuidade ao processo da reforma educacional. Em 1936, foram iniciados os trabalhos para a elaboração do Plano Nacional de Educação, previsto pela Constituição de 1934, que deveria ser elaborado pelo Conselho Nacional de Educação. Com o objetivo de recolher informações e estudos para a elaboração desse plano, Capanema distribuiu um questionário que continha questões sobre o ensino (SOARES; DASSIE; ROCHA, 2004).

Muitos educadores demonstraram interesse pelos conteúdos do Ensino Secundário. De modo a esclarecer os questionamentos feitos pelos educadores, a Associação Brasileira de Educação, entre maio e agosto de 1937, promoveu diversas conferências, entre elas, uma que foi realizada por Roxo. Mesmo após ter deixado a direção do Colégio Pedro II, Roxo continuou exercendo um papel de liderança e influenciou a proposta de ensino da Matemática, da Reforma Capanema (SOARES; DASSIE; ROCHA, 2004).

Em 1939, Capanema iniciou estudos para a reformulação do Ensino Secundário. O ministro analisou um relatório elaborado pelo Instituto Nacional de Estudos Pedagógicos sobre a educação escolar brasileira, no período de 1932 a 1936, a proposta do Colégio Pedro II e um relatório sobre a legislação do Ensino Secundário, vigente em alguns países europeus (SOARES; DASSIE; ROCHA, 2004).

No período de 1942 a 1946, a educação brasileira passou por novas reformas, impostas por meio de decretos. Capanema, por meio de leis orgânicas, implantou os ensinos industrial, secundário, comercial, normal, primário e agrícola, e criou o Serviço Nacional de Aprendizagem Industrial – SENAI - e o Serviço Nacional de Aprendizagem Comercial – SENAC (SOARES; DASSIE; ROCHA, 2004).

Capanema manteve a divisão do Ensino Secundário em dois ciclos: o ginásial, com duração de quatro anos, e o colegial, com duração de três anos, nas modalidades clássica e científica. Também por meio de lei orgânica foi criado o ramo secundário técnico-profissional, subdividido em industrial, comercial e agrícola, além do normal, destinado à formação de professores para a escola primária. Essas reformas foram dualistas, porque separaram o Ensino Secundário, destinado para as elites, e o Ensino Profissional, para o povo. Somente os egressos do Ensino Secundário poderiam ingressar no Ensino Superior (MORALES et al., 2003).

Em relação ao ensino da Matemática, os professores do Colégio Militar do Rio de Janeiro foram contra a seriação e, por isso, Roxo recuou em sua posição de fusão da Aritmética, da Geometria e da Álgebra, e propôs que o estudo das funções fosse iniciado nas séries iniciais. Essa proposta também não foi aceita. A Reforma Capanema, para o Ensino Secundário, ficou em vigor até a aprovação, em 1961, da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (SOARES; DASSIE; ROCHA, 2004).

Na década de 1960, o Movimento da Matemática Moderna chegou ao Brasil (FERNANDES; MENEZES, 2004). Estados Unidos, França, Japão, URSS, Holanda, Inglaterra, Argentina, Bélgica, Portugal etc. também foram influenciados por esse movimento (SOARES; DASSIE; ROCHA, 2004), que pretendia aproximar a Matemática trabalhada na escola básica com a produzida pelos pesquisadores da área (FERNANDES; MENEZES, 2004).

O movimento da Matemática Moderna defendia a inclusão de vários conteúdos nos programas, como, por exemplo, o estudo de conjuntos, de espaços vetoriais, de matrizes, de estatística e de cálculo diferencial e integral (SOARES; DASSIE; ROCHA, 2004). Esse movimento valorizou o uso da linguagem da teoria dos conjuntos (NOGUEIRA, 2005).

O Movimento da Matemática Moderna tinha, como um de seus principais objetivos, integrar os campos da aritmética, da álgebra e da geometria no ensino, mediante a inserção de alguns elementos unificadores, tais como a linguagem dos conjuntos, as estruturas algébricas e o estudo das relações e funções. Enfatizava-se, ainda, a necessidade de conferir mais importância aos aspectos lógicos e estruturais da Matemática, em oposição às características pragmáticas que, naquele momento, predominavam no ensino, refletindo-se na apresentação de regras sem justificativa e na mecanização dos procedimentos (GOMES, 2012, p. 24).

O Movimento da Matemática Moderna estimulou os professores a refletirem sobre a sua prática e sobre os objetivos do ensino, mas não conseguiu unificar, democratizar e tornar mais acessível o ensino da Matemática (SOARES; DASSIE; ROCHA, 2004).

Entre os anos de 1995 e 1996, o governo federal elaborou os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), do Ensino Fundamental, a partir de análise de pesquisas realizadas pela Fundação Carlos Chagas sobre os currículos oficiais e, ainda, de informações sobre as experiências de outros países. Os PCN objetivam estabelecer uma referência curricular e apoiar a revisão e/ou elaboração de propostas curriculares dos estados ou das escolas integrantes dos sistemas de ensino (BRASIL, 1997).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais propõem que a situação-problema seja o ponto de partida do ensino da Matemática. O professor deve proporcionar aos alunos problemas que possam ser resolvidos por várias estratégias, a partir das relações entre os conhecimentos já adquiridos e os novos. Os PCN recomendam que, no Ensino Fundamental, os professores trabalhem, por exemplo, com diferentes tipos de problemas aditivos, ou seja, de situações de transformação, de combinação, de comparação e de composição que exigem a realização de adições e/ou de subtrações (BRASIL, 1997).

Apesar de terem sido publicados no final da década de 1990, muitos professores desconhecem as recomendações dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino da Matemática e, por isso, não trabalham diferentes tipos de problemas aditivos em sala de aula, como demonstrado, por exemplo, por Kazakevich (2012) e Dorne (2013), que analisaram os cadernos de, respectivamente, 14 e 10 turmas do terceiro ano do Ensino Fundamental, de duas cidades diferentes do noroeste do Paraná.

Kazakevich (2012) verificou que entre os 341 problemas registrados nos cadernos, 81% eram de combinação ou de transformação, e apenas 19%, de comparação ou de composição; e Dorne (2013) observou que entre os 347 problemas trabalhados pelas professoras, 84% eram de combinação ou de transformação, e 16%, de comparação ou de



composição. Os professores do terceiro ano trabalharam, durante o ano letivo, problemas dos tipos mais simples, que exigiam o cálculo do todo (ou composta) a partir da soma das partes (ou medida elementar) e o cálculo do estado final de uma transformação, ou seja, as ideias de juntar e de acrescentar. Dorne (2013) avaliou 42 escolares que receberam esse ensino, quando cursavam o quarto ano, em uma tarefa de resolução de situações aditivas, e verificou um baixo desempenho do grupo: em 9 dos 13 problemas, as porcentagens de crianças que não obtiveram êxito variou de 31% a 53%, e em 4 problemas, de 12% a 19%.

Este trabalho teve como o **objetivo geral** analisar os erros cometidos por 21 alunos do quarto ano do Ensino Fundamental, avaliados por Dorne (2013), na resolução de problemas matemáticos aditivos, e como **objetivo específico**, caracterizar as dificuldades apresentadas por esses escolares em situações de transformação, de combinação, de comparação e de composição.

## 2 A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

As recomendações dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino de problemas matemáticos é fundamentada na Teoria dos Campos Conceituais (MAGINA et al., 2001), desenvolvida por Gerard Vergnaud, discípulo de Piaget e diretor de pesquisa do Centro Nacional de Pesquisa Científica, da França (MOREIRA, 2002).

Um dos objetivos da Teoria dos Campos Conceituais é “repensar as condições da aprendizagem conceitual, de maneira que se torne mais acessível à compreensão do aluno”. Ela busca as “possibilidades de filiações e rupturas entre as ideias iniciais” da Matemática, “levando em consideração as ações realizadas e compreendidas” pelo educando (PAIS, 2011, p. 1).

O foco da Teoria dos Campos Conceituais é “o próprio conteúdo do conhecimento e a análise conceitual do domínio desse conhecimento” (VERGNAUD, 1994 apud MOREIRA, 2002, p. 7). Isso porque, no “[...] momento em que nos interessamos por aquilo que se passa na sala de aula, somos obrigados a nos interessar pelo conteúdo do conhecimento” (VERGNAUD, 1996, p. 10).

Os conhecimentos são os saberes expressos pelo aluno (VERGNAUD, 1996), cujo domínio requer tempo, e ocorre por meio da experiência e da aprendizagem e, por isso, é necessário que o professor apresente vários tipos de situações-problema em sala de aula, pois

essa diversidade contribuirá para que o aluno compreenda e construa os significados dos conceitos matemáticos (VERGNAUD, 2009a).

Os conhecimentos estão organizados em campos conceituais (VERGNAUD, 1996), ou seja, em “grandes conjuntos de situações, cuja análise e tratamento requerem diversos tipos de conceitos, procedimentos e representações simbólicas, que estão conectados entre si” (VERGNAUD, 1993, p.1). Um exemplo de campo conceitual é o aditivo, composto por problemas que envolvem relações de adição e de subtração (VERGNAUD, 2009a).

Um conceito nunca ocorre sozinho em um problema matemático e, por isso, é preciso estudar o campo conceitual a que ele pertence (VERGNAUD, 1993). Observe o problema a seguir: Antonio tinha 4 figurinhas. Ele ganhou mais 3 figurinhas de seu tio. Quantas figurinhas Antonio tem agora? Essa situação aditiva envolve, por exemplo, conceitos de temporalidade (tinha - passado; tem – agora, presente), de transformação (acrécimo), além de quantidade.

Os problemas de adição e de subtração envolvem diversos conceitos, como, por exemplo, os descritos a seguir.

Os conceitos de quantidades, discretas e contínuas; de medidas; da parte e do todo; do estado e da transformação; de comparação entre referido e o referente; de comparação de o quê com o quê, de composição binária; de medidas; transformações e relações; de inversão; de número natural e número relativo; de posição, abcissa e valor algébrico (VERGNAUD, 2003, p. 31).

Um conceito é composto por três conjuntos: de situações (S) ou referentes que dão sentido ao conceito; de invariantes operatórios (I) ou significados usados pela pessoa para analisar e solucionar essas situações; e de representações simbólicas (R) ou significantes, como, por exemplo, a linguagem, os gráficos, os diagramas etc. utilizados para representar os procedimentos utilizados na resolução dessas situações. As situações permitem que os conceitos tornem-se significativos para os alunos e, por isso, são elas, e não os conceitos, a principal entrada de um campo conceitual (VERGNAUD, 1996).

Considerando a importância das situações para o desenvolvimento dos campos conceituais, “o primeiro ato de mediação possível do professor é a escolha de situações para seus alunos” (VERGNAUD, 2003, p. 36). O termo “situação” ou tarefa cognitiva envolve duas ideias principais: de variedade e de história. Isso porque um campo conceitual é formado

por vários tipos de situações, e por conhecimentos que foram elaborados no decorrer das situações que a pessoa teve de enfrentar ao longo do tempo (VERGNAUD, 1996).

A pessoa, para lidar com uma determinada situação, possui “vários tipos de conhecimentos para identificar os objetos e suas relações e definir, a partir disso, objetivos e regras de conduta pertinentes” (VERGNAUD, 2009b, p. 23).

Esses conhecimentos-em-ação, conhecimentos implícitos ou invariantes operatórios, juntamente com os objetivos, as regras-em-ação ou de conduta e, ainda, as inferências ou raciocínios, são os elementos que formam os esquemas (VERGNAUD, 1993).

O esquema é a “organização invariante do comportamento para uma determinada classe de situações” (VERGNAUD, 2009b, p. 21), ou seja, “a forma como a pessoa (o aluno) organiza seus invariantes de ação” (conhecimentos implícitos) “ao lidar com um conjunto de situações análogas” (MAGINA et al., 2001, p. 12).

Esquema é o conceito introduzido por Piaget para dar conta das formas de organização tanto das habilidades sensório-motoras como das habilidades intelectuais. Um esquema gera ações e deve conter regras, mas não é um estereótipo porque a seqüência [*sic*] de ações depende dos parâmetros da situação (VERGNAUD, 1994 apud MOREIRA, 2002, p. 12).

Os esquemas estão relacionados a duas classes de situações: a primeira, em que a pessoa apresenta, “em dado momento de seu desenvolvimento e sob certas circunstâncias”, as “competências necessárias ao tratamento relativamente imediato da situação”; a segunda, em que não dispõe de todas as competências necessárias, o que a “obriga a um tempo de reflexão e exploração, a hesitações, a tentativas frustradas”, que podem levá-la, eventualmente, ao sucesso. No primeiro caso, um esquema permite enfrentar a situação; e no segundo caso, vários esquemas são utilizados para buscar a solução (VERGNAUD, 1993, p. 12).

Há muito de implícito nos esquemas. Isso porque a criança pode não conseguir explicitar as regras-em-ação ou de conduta necessárias para realizar, por exemplo, uma adição de números inteiros, mas pode ser capaz de executar a seqüência de ações necessárias para a realização da operação. Por exemplo: a criança pode não conseguir explicar verbalmente que é preciso iniciar a adição pela coluna das unidades, e continuar pela coluna das dezenas, das centenas etc.; ou explicar que se a soma dos números da coluna das unidades for inferior a dez, deve registrar o valor sob a linha do total, mas se for superior a dez, deve escrever o valor das unidades sob o valor da linha do total e transportar a dezena para a coluna situada à esquerda (VERGNAUD, 1993).

Os “conhecimentos contidos nos esquemas” são denominados invariantes operatórios (VERGNAUD, 1993, p. 4). Esses conhecimentos “não são necessariamente explícitos nem explicitáveis, nem mesmo conscientes” (VERGNAUD, 2009b). São implícitos os conhecimentos relacionados aos esquemas de ação do aluno e, por isso, o aluno consegue resolver um problema, mas não sabe explicar como chegou ao resultado (MAGINA et al., 2001).

Existem dois tipos de conhecimentos contidos nos esquemas: os conceitos-em-ação e os teoremas-em-ação, os quais permitem que a pessoa relacione a teoria com a prática, ou seja, os esquemas que possui com a situação a ser resolvida (VERGNAUD, 1993).

Um conceito-em-ação é um “conceito considerado pertinente na ação em situação”, que permite identificar objetos concretos e objetos construídos pela cultura, pela ciência e pela própria pessoa, suas propriedades e relações (VERGNAUD, 2009b. p. 23).

Um teorema-em-ação é uma “proposição tida como verdadeira na ação em situação” (VERGNAUD, 2009b. p. 23), isto é, as “relações matemáticas que são levadas em consideração pelos alunos, quando estes escolhem uma operação, ou seqüência [*sic*] de operações, para resolver um problema” (MAGINA et al., 2001).

Para compreender o desenvolvimento das conceitualizações, é preciso tomar como objetos de estudo conjuntos de situações e conjuntos de conceitos, ou seja, os campos conceituais. O conjunto de situações, para ser dominado, requer vários conceitos, esquemas e representações simbólicas. O conjunto de conceitos contribui para o domínio dessas situações (VERGNAUD, 2009b).

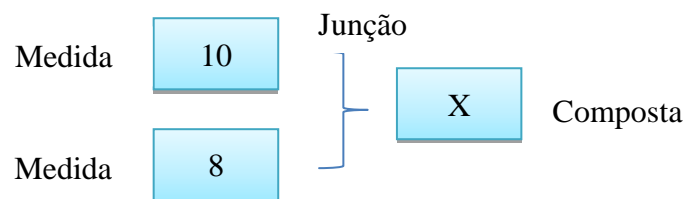
Para que o educando domine um campo conceitual, é preciso que entre em contato com inúmeras situações - tanto no ambiente escolar quanto fora dele - para poder desenvolver esquemas que lhe permitam lidar com essas situações. No decorrer desse processo, a criança apropriar-se-á das representações simbólicas que farão a conexão entre as situações e os invariantes operatórios empregados para resolvê-las. Portanto, os conjuntos de situações, de invariantes operatórios e de representações simbólicas fundamentam a formação de conceitos (MAGINA et al., 2010).

O campo conceitual aditivo, analisado neste estudo, é formado pelo conjunto de situações que, para serem resolvidas, requerem uma ou várias adições e/ou subtrações, assim como pelo conjunto de conceitos e de teoremas que possibilitam analisar essas situações (VERGNAUD, 1996a). Fazem parte desse campo conceitual vários conceitos, como, por exemplo,

[...] de cardinal e de medida, de transformação temporal por aumento ou diminuição (perder ou gastar certa quantia), de relação de comparação quantificada (ter bombons, ou três anos mais que), de composição binária de medidas (quanto no total?), de composição de transformações e relações, de operação unitária, de inversão, de número natural e número relativo, de abscissa, de deslocamento orientado e quantificado ... (VERGNAUD, 1993).

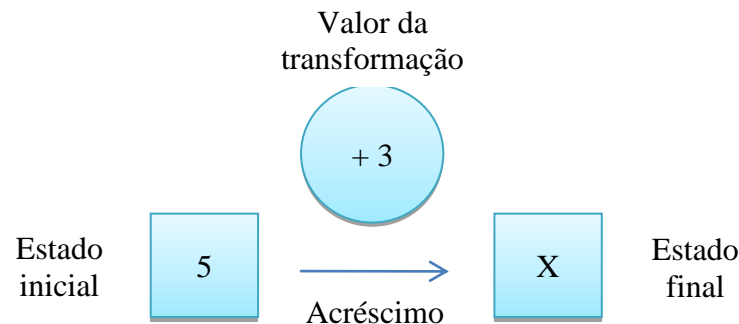
As situações do campo conceitual aditivo são formadas por relações ternárias que, combinadas de diversos modos, formam seis categorias de situações: composição de duas medidas em uma terceira medida; transformação de uma medida inicial em uma medida final; relação de comparação entre duas medidas; composição de duas transformações; transformação de uma relação ou de um estado relativo; e composição de duas relações ou de dois estados relativos (VERGNAUD, 2009a).

A primeira categoria, de composição de medidas, corresponde ao grupo descrito nos Parâmetros Curriculares Nacionais como de “combinação”. Nessas situações, os conceitos de adição e subtração estão relacionados com as ações de juntar e separar (BRASIL, 1997). Nessa categoria, há duas classes de situações: a primeira, em que são conhecidas duas medidas elementares (partes) e é preciso encontrar a composta (todo); e a segunda, em que é conhecida a composta e uma das medidas elementares e é solicitada a outra medida ou parte do todo (VERGNAUD, 2009a). Por ex: Maria foi à feira e comprou 10 laranjas e 8 maçãs. Quantas frutas ela comprou no total? Esse problema, de busca da composta, pode ser representado, simbolicamente, pelo esquema a seguir.

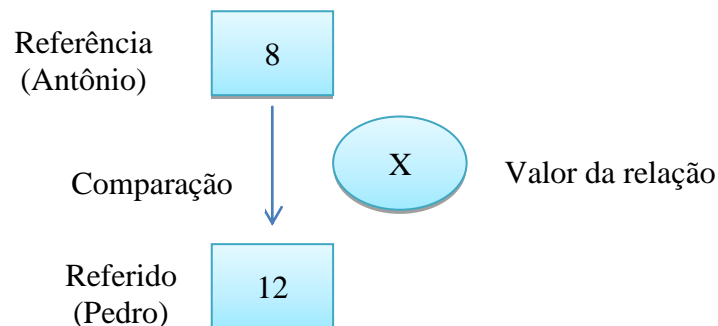


A segunda categoria de situações envolve uma transformação positiva ou negativa, em que os conceitos de adição e de subtração trabalhados são os de acrescentar e retirar (BRASIL, 1997). Nessa categoria, é possível formar seis classes de situações: busca do estado final de uma transformação positiva ou negativa, busca do estado inicial de uma transformação positiva ou negativa e busca do valor de uma transformação positiva ou negativa (VERGNAUD, 2009a). Por ex: Ana tinha 5 bonecas. Ela ganhou mais 3 carrinhos.

Quantas bonecas Ana tem agora? Esse problema, de busca do estado final de uma transformação positiva, pode ser representado, simbolicamente, pelo esquema a seguir.

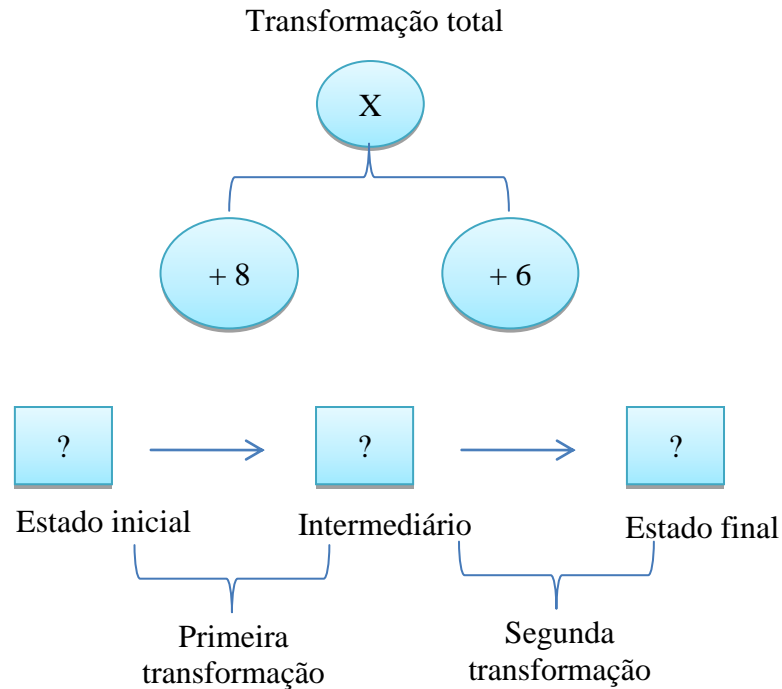


A terceira categoria de problemas aditivos, de relação entre duas medidas (por exemplo, “a mais” ou “a menos”), corresponde aos problemas denominados nos Parâmetros Curriculares Nacionais como de “comparação” (BRASIL, 1997). Três classes de situações fazem parte dessa categoria: busca do referido, busca do referente e busca do valor da relação (MAGINA et al., 2001). Por ex: Antônio tem 8 carrinhos. O seu primo Pedro tem 12 carrinhos. Quem tem mais carrinhos? Quantos carrinhos a mais? Esse problema, de busca do valor da relação de uma comparação positiva, pode ser representado pelo esquema a seguir.

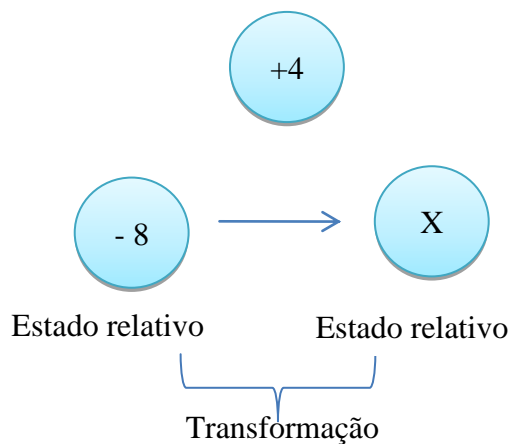


Fazem parte da quarta categoria de relações aditivas, situações de composição de duas transformações (positivas e/ou negativas) que formam duas classes de problemas: a primeira, em que são conhecidas duas transformações elementares e deve ser encontrada a composta; a segunda, em que são conhecidas a composta e uma das transformações elementares, e é preciso buscar a outra transformação (VERGNAUD, 2009a).

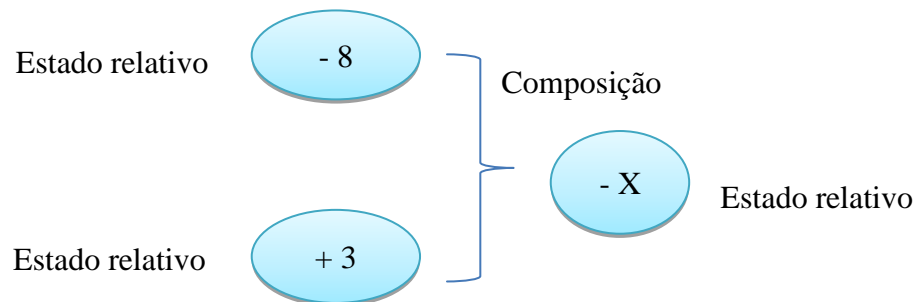
Um exemplo de situação de composição é fornecido a seguir. Ontem, Juliano ganhou 8 doces. Hoje, ele ganhou 6 doces. Quantos doces ele ganhou ao todo? Esse problema, de busca da composta de duas transformações positivas, pode ser representado pelo esquema a seguir.



A quinta categoria de problemas aditivos, que trata da transformação realizada sobre uma relação (estado relativo) para resultar em outro estado relativo (VERGNAUD, 2009a), não é abordada nos PCN (BRASIL, 1997). Por ex: Luiza devia 8 reais para Lorenzo. Ela devolveu 4 reais para o amigo. Quantos reais Luiza ainda precisa devolver para Lorenzo? Esse problema, de busca do estado relativo da transformação de uma relação, pode ser representado pelo esquema a seguir.



A sexta categoria de problemas aditivos, de composição de dois estados relativos (relações) para resultar em outro estado relativo (VERGNAUD, 2009a), também não é abordada nos PCN (BRASIL, 1997). Por ex: Paulo deve 8 figurinhas para Eduardo, mas Eduardo também deve 3 figurinhas para Paulo. Quantas figurinhas Paulo ainda deve pagar para Eduardo? Esse problema, de busca do estado relativo de duas composições, pode ser representado pelo esquema a seguir.



O campo conceitual aditivo desenvolve-se no decorrer de um longo período, que se estende dos 3- 4 anos até os 11-12 anos (VERGNAUD, 2009b, 2011). No decorrer do Ensino Fundamental, o professor, mediador entre o conhecimento matemático e o aluno, deve “estar atento para as dificuldades inerentes aos tipos de situações, de maneira a não ficar apenas repetindo, ao longo da formação inicial do estudante, problemas que requeiram dele um único raciocínio” (MAGINA et al., 2001, p. 21).

Neste estudo procurou-se responder à seguinte questão: quais foram as dificuldades apresentadas por alunos do quarto ano, na realização de problemas do campo conceitual aditivo?

### 3 MÉTODO

Para a realização deste estudo foram selecionadas, aleatoriamente, tarefas de resolução de problemas matemáticos do tipo aditivo, realizadas por 21 alunos do quarto ano do Ensino Fundamental, que participaram da pesquisa de mestrado de Dorne (2013), realizada pelo Programa de Pós-Graduação em Educação, da Universidade Estadual de Maringá - UEM. O estudo de Dorne (2013) foi aprovado pelo Comitê Permanente de Ética em Pesquisa



Envolvendo Seres Humanos, da UEM. Os responsáveis pelos participantes assinaram o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido.

A tarefa realizada pelos alunos, e aplicada por Dorne (2013), foi elaborada por Kazakevich (2012). Ela é composta por 13 problemas: 3 de combinação, 3 de transformação positiva, 3 de transformação negativa, 3 de comparação e 1 de composição (duas transformações positivas). Os enunciados dos problemas são descritos no quadro abaixo.

Quadro 1 – Tarefa de resolução de problemas aditivos

Tipos de problemas		Enunciados dos problemas
Combinação	Busca da composta	1) Na escola de Ana há 123 meninos e 219 meninas. Quantos alunos há na escola?
	Busca de uma das medidas elementares	8) Em uma caixa, há 50 frutas. 23 frutas são maçãs e o restante são bananas. Quantas bananas há nessa caixa?
Transformação Positiva	Busca do estado final	2) João tinha 128 carrinhos. Ele ganhou mais 35. Com quantos carrinhos ficou?
	Busca do valor da transformação	9) Paula tinha 18 bombons. Ela ganhou mais alguns de sua mãe e ficou com 25. Quantos bombons Paula ganhou?
	Busca do estado inicial	6) Maria ganhou 40 reais em seu aniversário, e com isso ficou com 95 reais. Quantos reais ela tinha antes do aniversário?
Transformação Negativa	Busca do estado final	10) No depósito do supermercado Bom Dia, há 408 latas de óleo. Nesta semana, 126 latas foram colocadas nas prateleiras do supermercado para serem vendidas. Quantas latas de óleo ainda têm no depósito?
	Busca do valor da transformação	3) Juca tinha 112 figurinhas. Ele perdeu algumas. Agora ele tem somente 104. Quantas figurinhas ele perdeu?
	Busca do estado inicial	13) Pedro colheu laranjas ontem. Hoje ele vendeu 110 laranjas e ficou com 85. Quantas laranjas ele colheu ontem?

Comparação	Busca do referido (comparação positiva)	5) Mariana tem 33 revistas. Caio tem 18 revistas a mais que Mariana. Quantas revistas tem Caio?
	Busca do referido (comparação negativa)	11) Lucas tem 293 bois em sua fazenda. Maria tem 75 bois a menos que Lucas. Quantos bois Maria tem em sua fazenda?
	Busca do valor da relação	4) Marcos tem 24 anos. Sara tem 17 anos. Quem tem mais anos? Quantos anos a mais?
	Busca do referente	7) Ana tem alguns brinquedos. Bruno tem 8 brinquedos a mais que Ana. No total, Bruno tem 26 brinquedos. Quantos brinquedos tem Ana?
Composição	Busca do estado final de duas transformações positivas	12) Hoje pela manhã, mamãe gastou R\$ 28,00 na feira. À tarde, ela gastou R\$ 34,00 no açougue. Quanto mamãe gastou hoje?

#### 4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os resultados dos 21 escolares na tarefa de Matemática foram analisados de duas formas: o desempenho do grupo nos problemas aditivos; e o desempenho individual nas situações aditivas.

##### 4.1 RESULTADOS DO GRUPO DE ALUNOS

Considerando que cada escolar resolveu 13 problemas, o grupo de 21 estudantes efetuou 273 situações aditivas. No total, 28,49% ( $n = 77$ ) dos problemas foram resolvidos incorretamente. Nos 84 problemas de comparação realizados pelo grupo, houve erro em 32,14% ( $n = 27$ ). Nas 63 situações de transformação negativa e positiva, ocorreram erros em, respectivamente, 30,16% ( $n = 19$ ) e 28,57% ( $n = 18$ ) problemas. Nas 42 situações de combinação, 26,19% ( $n = 11$ ) foram realizadas incorretamente. No único problema de composição (duas transformações positivas), 9,52% ( $n = 2$ ) foram realizados incorretamente.

Tabela 1 – Porcentagens de erros do grupo nas categorias de problemas

Categorias de problemas	Proporções de erros	% de erros
Comparação	27/84	32,14
Transformação	37/126	29,36
Combinação	11/42	26,19
Composição	2/21	9,52
Total	77/273	-

Dorne (2013) analisou os problemas aditivos registrados, no ano anterior (terceiro ano), nos cadernos escolares de três turmas da escola onde estudavam os 21 alunos cujas tarefas foram analisadas neste trabalho. Na turma I, foram trabalhadas 37 situações aditivas durante o ano letivo: 26 de combinação, 1 de transformação positiva, 4 de transformação negativa, 4 de comparação e 2 de composição. Na turma II, o professor trabalhou 34 problemas: 19 de combinação, 4 de transformação positiva, 8 de transformação negativa, 3 de comparação e nenhum de composição. O professor da turma III trabalhou apenas 4 problemas aditivos: 1 de combinação e 3 de transformação positiva. As quantidades de situações aditivas trabalhadas foram muito discrepantes: nos cadernos de uma turma, foram encontrados apenas 4 problemas; e nos da outra, 37. Até mesmo nessa última turma a quantidade de situações foi muito pequena, considerando os 200 dias letivos e os problemas de transformação, de comparação e de composição.

Portanto, no terceiro ano, os professores trabalharam, basicamente, problemas de busca da composta (todo) de uma combinação. Justifica-se, assim, que essa tenha sido uma das classes de situação aditiva em que, na tarefa analisada neste estudo, o grupo de alunos teve pouca dificuldade: somente dois escolares erraram o primeiro problema (Na escola de Ana há 123 meninos e 219 meninas. Quantos alunos há na escola?) e, além disso, cometeram apenas erros de atenção. Por exemplo, o aluno nº 2 realizou a adição “ $123 + 119 = 342$ ”. Ao revisar o resultado, argumentou: “Vixi, eu fiz errado. É 219!” (o valor de uma das parcelas). Na segunda tentativa, copiou corretamente a centena.

Um erro foi considerado como sendo de “atenção” (At.) quando a criança demonstrou, em vários problemas da tarefa, que dominava os algoritmos tradicionais da adição ou da subtração. Apesar disso, errou uma operação, mas ao revisá-la, foi capaz de corrigir-se sem ajuda da pesquisadora (DORNE, 2013).

Tabela 2 – Problemas aditivos registrados nos cadernos escolares

Categorias e classes de problemas		Turma I	Turma II	Turma III
Combinação	Busca da composta (todo)	23	17	01
	Busca de uma das medidas elementares (parte)	03	02	-
Transformação positiva	Busca do estado final	01	03	01
	Busca do valor da transformação	-	01	02
	Busca do estado inicial	-	-	-
Transformação negativa	Busca do estado final	04	08	-
	Busca do valor da transformação	-	-	-
	Busca do estado inicial	-	-	-
Comparação	Busca do referido (comparação positiva)		-	-
	Busca do referido (comparação negativa)		-	-
	Busca do valor da relação	04	03	-
	Busca do referente		-	-
Composição	Busca do estado final de duas transformações	02	-	-
Total		37	34	04

Figura 1 - Erro de atenção cometido pelo aluno nº 2

1) Na escola de Ana há 123 meninos e 219 meninas. Quantos alunos há na escola?

$$\begin{array}{r} 1 \\ 123 \\ +119 \\ \hline 242 \end{array}$$

R: Na escola de Ana a 242 alunos.

Fonte: Dorne (2013)

Além de erros de atenção, os alunos também cometeram erros de “interpretação” (Int.) e no “algoritmo” (Alg.): este ocorreu quando os alunos, em dois ou mais problemas, demonstraram que não dominavam as técnicas operatórias, ou seja, os esquemas da adição ou da subtração, muitas vezes pelo uso de teoremas-em-ação falsos; e aquele, quando não compreenderam os enunciados das situações, muitas vezes porque determinados conceitos-em-ação foram considerados, inadequadamente, como pertinentes na ação em situação. Para a identificação dos conceitos-em-ação e dos teoremas-em-ação utilizados pela criança foi importante observar a sua ação na situação e a “sua fala, refletindo sobre sua produção, para identificação dos esquemas subjacentes” (MUNIZ, 2009, p. 43). “As sentenças de linguagem natural são modos importantes para expressar esses Teoremas-em-ação. A linguagem natural permite que os professores e alunos apontem os componentes do problema e as inter-relações entre eles [...]” (MAGINA et. al. 2001).

Embora de baixa frequência, também foram observados erros, em um mesmo problema, de interpretação e de atenção (Int. e At..) e de interpretação e no algoritmo (Int. e Alg.).

Tabela 3 – Proporções de alunos que cometeram cada tipo de erro

(continua)

Tipos de problemas		Enunciados dos problemas	Proporções de erros	Tipos de erros				
				At.	Alg.	Int.	Int; e Alg.	Int. e At.
Combinção	Busca da composta (todo)	1) Na escola de Ana há 123 meninos e 219 meninas. Quantos alunos há na escola?	2/21	2/2	-	-	-	-
	Busca de uma das medidas elementares	8) Em uma caixa, há 50 frutas. 23 frutas são maçãs e o restante são bananas. Quantas bananas há nessa caixa?	9/21	2/9	2/9	3/9	-	2/9
Transf. Positiva	Busca do estado final	2) João tinha 128 carrinhos. Ele ganhou mais 35. Com quantos carrinhos ficou?	4/21	3/4	1/4	-	-	-
	Busca do valor da transformação	9) Paula tinha 18 bombons. Ela ganhou mais alguns de sua mãe e ficou com 25. Quantos bombons Paula ganhou?	6/21	-	-	4/6	1/6	1/6
	Busca do estado inicial	6) Maria ganhou 40 reais em seu aniversário, e com isso ficou com 95 reais. Quantos reais ela tinha antes do aniversário?	8/21	-	2/8	5/8	1/8	-
Transf. Negativa	Busca do estado final	10) No depósito do supermercado Bom Dia, há 408 latas de óleo. Nesta semana, 126 latas foram colocadas nas prateleiras do supermercado para serem vendidas. Quantas latas de óleo ainda têm no depósito?	10/21	4/10	-	4/10	1/10	1/10
	Busca do valor da transformação	3) Juca tinha 112 figurinhas. Ele perdeu algumas. Agora ele tem somente 104. Quantas figurinhas ele perdeu?	4/21	4/4	-	-	-	-
	Busca do estado inicial	13) Pedro colheu laranjas ontem. Hoje ele vendeu 110 laranjas e ficou com 85. Quantas laranjas ele colheu ontem?	5/21	1/6	-	2/6	1/6	1/6

Tabela 3 – – Proporções de alunos que cometeram cada tipo de erro

(conclusão)

Tipos de problemas		Enunciados dos problemas	Proporções de erros	Tipos de erros				
				At.	Alg.	Int.	Int; e Alg.	Int. e At.
Comparação	Busca do referido (comp. positiva)	5) Mariana tem 33 revistas. Caio tem 18 revistas a mais que Mariana. Quantas revistas tem Caio?	3/21	1/3	-	2/3	-	-
	Busca do referido (comp. negativa)	11) Lucas tem 293 bois em sua fazenda. Maria tem 75 bois a menos que Lucas. Quantos bois Maria tem em sua fazenda?	6/21	3/6	2/6	1/6	-	-
	Busca do valor da relação	4) Marcos tem 24 anos. Sara tem 17 anos. Quem tem mais anos? Quantos anos a mais?	6/21	3/6	1/6	2/6	-	-
	Busca do referente	7) Ana tem alguns brinquedos. Bruno tem 8 brinquedos a mais que Ana. No total, Bruno tem 26 brinquedos. Quantos brinquedos tem Ana?	12/21	2/12	2/12	6/12	2/12	-
Composição	Busca do estado final de duas transformações positivas	12) Hoje pela manhã, mamãe gastou R\$ 28,00 na feira. À tarde, ela gastou R\$ 34,00 no açougue. Quanto mamãe gastou hoje?	2/21	-	-	1/2	-	1/2
Total de erros			77	25	10	30	6	6

Além do primeiro problema, as demais situações em que os alunos tiveram pouca dificuldade foram: a de composição (12º problema), de busca do referido de uma comparação (5º problema), busca do estado final de uma transformação positiva (2º problema) e busca do valor da transformação negativa (3º problema). Na 12ª situação, somente dois alunos (9,52%) não tiveram êxito (Hoje pela manhã, mamãe gastou R\$ 28,00 na feira. À tarde, ela gastou R\$ 34,00 no açougue. Quanto mamãe gastou hoje?). Nessa situação, de composição (busca do estado final de duas transformações positivas), a principal dificuldade foi com o termo “gastar”, possível conceito-em-ação que na situação foi interpretado como sinônimo de diminuição. Por exemplo, o aluno nº 15 disse: “Tinha que fazer de menos, porque ela comprou e tá gastando”.

Figura 2 - Erro de interpretação e atenção cometido pelo aluno nº 15

12) Hoje pela manhã, mamãe gastou R\$ 28,00 na feira. À tarde, ela gastou R\$ 34,00 no açougue. Quanto mamãe gastou hoje?

$$\begin{array}{r} 34,00 \\ - 28,00 \\ \hline 16,00 \end{array}$$

R: ..... Mamãe gastou hoje 16,00 .....

Fonte: Dorne (2013)

Três crianças (14,29%) não resolveram corretamente o terceiro problema, de busca do referido de uma comparação positiva (Mariana tem 33 revistas. Caio tem 18 revistas a mais que Mariana. Quantas revistas tem Caio?). A principal dificuldade foi de compreender o enunciado. O aluno nº 14, por exemplo, disse: “Pensei que tinha que ver quantas a Mariana tem a mais. Daí, por isso, eu fiz de menos”.



Quatro alunos (19,05%) erraram o segundo (João tinha 128 carrinhos. Ele ganhou mais 35. Com quantos carrinhos ficou?) e o terceiro problemas (Juca tinha 112 figurinhas. Ele perdeu algumas. Agora ele tem somente 104. Quantas figurinhas ele perdeu?), em que foram solicitados, respectivamente, busca do estado final de uma transformação positiva e de busca do valor de uma transformação negativa. Nos dois casos, a principal dificuldade foi de atenção.

É interessante observar que, apesar de os cadernos escolares terem evidenciado que os professores não trabalharam em sala de aula situações de busca dos valores de transformações negativas, as crianças não tiveram dificuldade em realizá-la. Isso provavelmente ocorreu porque, diferente de um problema de busca do valor de uma transformação positiva, não houve necessidade de realizar uma operação inversa, ou seja, o problema foi resolvido como se fosse de busca do valor final de uma transformação negativa ( $112 - x = 104$ ;  $x = 112 - 104$ ;  $x = 08$ ).

O ensino de poucos tipos de problemas em sala de aula, observado neste estudo, deve-se ao desconhecimento dos professores, das diferentes categorias e classes de situações aditivas. Campos e Magina (2004), por exemplo, solicitaram a 103 docentes das séries iniciais do Ensino Fundamental, da rede estadual de São Paulo, que redigissem quatro problemas do tipo aditivo, e quatro do tipo multiplicativo. Os professores elaboraram, basicamente, problemas de busca da composta de uma combinação e de busca do estado final de uma transformação. Entre os 389 problemas aditivos, 88,43% ( $n = 344$ ) foram dessas duas classes.

Esse desconhecimento das diversas categorias e classes de problemas aditivos parece decorrer da formação dos professores. Fortalece essa hipótese os resultados obtidos por Vargas e Kajihara (2013), que analisou o nível de conhecimento de calouros e formandos do Curso de Pedagogia de uma instituição pública de ensino superior do noroeste do Paraná, sobre problemas matemáticos do tipo aditivo. Participaram do estudo 109 acadêmicos: 65 do primeiro ano, e 44 do quarto ano. Cada participante redigiu três problemas de adição e três de subtração. Os alunos elaboraram, basicamente, problemas de busca da composta de uma combinação e de busca do estado final de uma transformação, ou seja, 90% e 77% das situações, respectivamente, dos calouros e dos formandos, eram desses tipos. Portanto, os formandos, apesar de terem cursado disciplinas de Metodologia do Ensino de Matemática, apresentaram o mesmo nível de conhecimento dos calouros sobre problemas do tipo aditivo.

Em relação ao presente estudo, além de, no terceiro ano, não ter sido proporcionado aos alunos uma variedade de situações aditivas, o material didático utilizado em sala de aula também não favoreceu a ampliação do campo conceitual. O livro didático do terceiro ano

continha apenas 41 problemas: 19 de combinação, 13 de transformação, 9 de comparação e nenhum de composição. Entre as 19 situações de combinação, 14 eram de busca da composta (todo) e 5 de busca de uma das medidas elementares (DORNE, 2013).

A pouca variedade de situações aditivas oferecida nos materiais didáticos e o predomínio de problemas de combinação também foi registrada por Machado e Kajihara (2014), que analisou livros do terceiro ano do Ensino Fundamental adotados por uma escola pública e por três escolas particulares de uma cidade localizada no noroeste do Paraná. Os quatro livros continham 144 problemas do tipo aditivo: 41,66% (n = 60) de combinação; 18,06% (n = 26) de transformação; 18,06% (n = 26) de comparação e 22,22% (n = 32) de composição.

As situações em que os alunos que participaram deste estudo tiveram maior dificuldade foram os de busca do referente de uma comparação positiva (7º problema - 57,14%, n = 12), de busca do estado final de uma transformação negativa (10º problema - 47,62%, n = 10) e de busca de uma das medidas elementares de uma combinação (8º problema - 42,86%, n = 9). Os cadernos escolares e o livro didático do terceiro ano não continham nenhum problema de busca do referente de uma comparação, e apresentavam poucas situações de busca de uma das medidas elementares de uma combinação e de busca do estado final de uma transformação negativa.

Considerando que os alunos do presente estudo realizaram a tarefa de resolução de problemas no primeiro semestre, do quarto ano do Ensino Fundamental, é possível que poucas situações dessas três classes tivessem sido trabalhadas em sala de aula até aquele momento. No sétimo problema, de busca do referente (Ana tem alguns brinquedos. Bruno tem 8 brinquedos a mais que Ana. No total, Bruno tem 26 brinquedos. Quantos brinquedos tem Ana?), o conceito-em-ação “a mais” foi compreendido como sinônimo de “mais”, de “acréscimo”, o que levou 8 das 12 crianças que não obtiveram êxito a raciocinarem que deveriam realizar a combinação das quantidades de brinquedos que Ana e Bruno possuíam para obter a composta (o todo). O aluno nº 7, por exemplo, justificou que fez uma adição “Porque ele tem 8 a mais. Daí eu somei 8 mais 26”. O aluno nº 9 disse: “Porque era para ver quanto brinquedos que a Ana tem. Daí eu somei”.

Figura 3 - Erro de interpretação cometido pelo aluno n° 9

7) Ana tem alguns brinquedos. Bruno tem 8 brinquedos a mais que Ana. No total, Bruno tem 26 brinquedos. Quantos brinquedos tem Ana?

$$\begin{array}{r} 1 \\ + 26 \\ 8 \\ \hline 36 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 26 \\ 8 \\ \hline 34 \end{array}$$

R: Bruno tem 34

Fonte: Dorne (2013)

Essa classe de problema é difícil para as crianças, porque “normalmente pensamos sobre o referente e, a partir dele, achamos o referido. Aqui a situação é justamente inversa” (MAGINA et al., 2001, p. 49). Ana é a referência, pois o valor de Bruno está descrito em termo de quanto a mais ele tem relação ao tanto que a Ana tem, e que é desconhecido. O fato de não ter de onde partir (valor do referente), dificulta a resolução do problema.

No sétimo problema, quatro crianças utilizaram teoremas-em-ação falsos. Na primeira tentativa, o aluno n° 7 utilizou o seguinte teorema-em-ação: na adição, devem ser somadas as dezenas de uma parcela com as unidades da outra parcela que tem a ordem das dezenas “vazia”. Ele fez “ $26 + 8 = 114$ ”, e explicou: “ $8 + 2 + 1$ , que deu 11. [...] Porque não tem número aqui” (ordem das dezenas). Na segunda tentativa, fez “ $26 - 8 = 78$ ” porque utilizou outro teorema-em-ação: devem ser subtraídas as unidades do subtraendo das dezenas do minuendo, porque a ordem das dezenas do subtraendo está “vazia”. A criança fez “ $16 - 8 = 8$ ” e “ $8 - 1 = 7$ ”, “Porque não tem número aqui” (ordem das dezenas da parcela inferior). Esses dois teoremas-em-ação revelam a dificuldade da criança em compreender uma das características do sistema decimal, as ordens (unidades, dezenas, centenas etc.).

Figura 4 - Erro de interpretação e algoritmo cometido pelo aluno nº 7

7) Ana tem alguns brinquedos. Bruno tem 8 brinquedos a mais que Ana. No total, Bruno tem 26 brinquedos. Quantos brinquedos tem Ana?

$$\begin{array}{r} 26 \\ + 8 \\ \hline 174 \end{array}$$

R: Quem tem 14

Fonte: Dorne (2013)

Ainda no sétimo problema, o aluno nº 10 realizou a operação “ $26 - 8 = 22$ ”, guiado pelo seguinte teorema-em-ação: quando há uma posição vazia em uma parcela, é preciso “baixar” o numeral da mesma ordem, da outra parcela. Ele explicou: “Não tem nada para fazer (ordem das dezenas, da parcela inferior, vazia); daí eu baixei dois”. O aluno nº 15 realizou a subtração “ $8 - 26 = 22$ ”, por causa do seguinte teorema-em-ação: a primeira quantidade fornecida no enunciado deverá ser o minuendo, e a segunda quantidade, o subtraendo. A criança explicou que colocou “8” na parcela superior, “Porque 8 vem primeiro” (no enunciado).

Outra situação que muitos escolares não conseguiram êxito foi a de busca do estado final de uma transformação negativa (10º problema - No depósito do supermercado Bom Dia, há 408 latas de óleo. Nesta semana, 126 latas foram colocadas nas prateleiras do supermercado para serem vendidas. Quantas latas de óleo ainda têm no depósito?). Entre as dez crianças que não resolveram corretamente a situação, três cometeram erros de atenção e três tiveram dificuldade de compreender o enunciado do problema. Por exemplo, o aluno nº 11 disse: “Eu fiz de mais porque perguntou quantas latas de óleo **tinha** no depósito”. O aluno nº 16 afirmou: “Porque ele falou que o mercado **comprou mais** 126”. O aluno nº 18 justificou: “Porque tinha 408 **mais** 126”. Três crianças utilizaram os seguintes conceitos-em-ação “colocar”, como sinônimo de acrescentar, e “ter”, como de “todo”. Se a pergunta final tivesse sido “Quantas latas de óleo restam no depósito?”, provavelmente os alunos teriam menos dificuldade, porque “restar” é normalmente utilizada na escola como palavra-chave para identificar uma operação de subtração.

Figura 5 - Erro de interpretação cometido pelo aluno nº 18

10) No depósito do supermercado Bom Dia, há 408 latas de óleo. Nesta semana, 126 latas foram colocadas nas prateleiras do supermercado para serem vendidas. Quantas latas de óleo ainda têm no depósito?

$$\begin{array}{r} 408 \\ + 126 \\ \hline 534 \end{array}$$

R: no depósito há 534 latas de óleo

Fonte: Dorne (2013)

Ainda em relação ao décimo problema, dois escolares demonstraram dificuldade de compreensão do significado do zero, na notação posicional, e da representação gráfica da operação, na forma vertical. Eles não compreendem a diferença entre não tirar nada, de 2 dezenas ( $2 - 0$ ) e tirar 2 dezenas, do nada ( $0 - 2$ ) e utilizaram os seguintes teoremas-em-ação: não é possível retirar zero de uma quantidade e, por isso, é preciso “baixar” o numeral sob a linha do total (o aluno nº 4 fez “ $408 - 126 = 322$ ”, e explicou que “8 menos 6 é 2. Zero não dá para tirar 2. Daí eu ponhei 2”); ou o resultado é zero (o aluno nº 18 fez “ $408 - 126 = 302$ ”, porque “8 tira 6 dá 2. Zero tira 2, dá zero. 4 menos 1 dá 3.”).

Figura 6 - Erro no algoritmo cometido pelo aluno n° 4

10) No depósito do supermercado Bom Dia, há 408 latas de óleo. Nesta semana, 126 latas foram colocadas nas prateleiras do supermercado para serem vendidas. Quantas latas de óleo ainda têm no depósito?

$$\begin{array}{r} 408 \\ - 126 \\ \hline 322 \end{array}$$

R: Há 322 latas de óleo.

Fonte: Dorne (2013)

A porcentagem de escolares que errou a oitava situação, de busca de uma das medidas elementares de uma combinação, também foi alta (Em uma caixa, há 50 frutas. 23 frutas são maçãs e o restante são bananas. Quantas bananas há nessa caixa?). Quatro das nove crianças que erraram, tiveram dificuldade de interpretar o enunciado do problema. O aluno n° 11 disse: “Eu pensei assim: que era pra fazer 50 mais 23. Pra saber quantas bananas tinha”. O escolar n° 8 explicou: “Porque a de mais, dá mais o resultado. Se eu fizesse de menos, dava pouco. E eu pensei que tinha que dá mais”. As crianças tiveram dificuldade em pensar, ao mesmo tempo na parte (23) e no todo ( $23 + x = 50$ ), ou seja, a utilizar um raciocínio de inclusão de classe. Esses alunos não conseguiram compreender que bananas, assim como as maçãs, fazem parte da classe das frutas, ou seja, que frutas é o todo, que maçãs é uma das partes, e que é preciso buscar a parte das bananas.

Figura 7 - Erro de interpretação cometido pelo aluno nº 11

8) Em uma caixa, há 50 frutas. 23 frutas são maçãs e o restante são bananas. Quantas bananas há nessa caixa?

$$\begin{array}{r} 50 \\ +23 \\ \hline 73 \end{array}$$

R: há 73 bananas

Fonte: Dorne (2013)

A criança nº 9 empregou o conceito-em-ação “ter” no sentido de “todo” (“Porque tava falando que era pra saber quantos que tinha”). Dois escolares utilizaram o mesmo teorema-em-ação: não é possível subtrair uma quantidade do zero e, por isso, é preciso “baixar” o numeral que a representa. Por exemplo, o aluno nº 4 fez “ $50 - 23 = 33$ ” e explicou que “Zero não dá pra tirar 3. Aí eu pensei que podia baixar o três. [...]”. A falta de conhecimento do sistema decimal dificulta a compreensão de que, como não é possível subtrair 3 unidades de 0, teremos de decompor 1 dezena em 10 unidades para retirar as 3 unidades. A criança explicou que “Quando não dá para tirar, eu baixo o número”. Essa fala sugere que a criança confunde o esquema da adição com o da divisão, em que é necessário baixar um numeral do dividendo para formar, com o resto, um número maior que o divisor.

Figura 8 - Erro no algoritmo cometido pelo aluno n° 4

8) Em uma caixa, há 50 frutas. 23 frutas são maçãs e o restante são bananas. Quantas bananas há nessa caixa?

$$\begin{array}{r} 50 \\ -23 \\ \hline 33 \end{array}$$

R: *Tem 33 bananas.*

Fonte: Dorne (2013)

#### 4.2 RESULTADOS INDIVIDUAIS

No grupo de 21 alunos do quarto ano, apenas 4 (19%) acertaram integralmente a tarefa, ou seja, as 13 situações aditivas, e 3 escolares (14%) erraram apenas 1 problema. Cerca de 34% dos alunos erraram de 1% a 38% da tarefa (2 a 5 problemas), e outros 34%, pelo menos 45% da tarefa.

Tabela 4 – Total de erros de cada aluno na tarefa

Nº de problemas resolvidos incorretamente	Quantidade de alunos	% de alunos
0	04	19,05
1	03	14,29
2   3	03	14,29
4   5	04	19,05
6   7	04	19,05
8   9	03	14,29
10   13	-	-



As crianças que tiveram maior dificuldade na tarefa erraram oito problemas, ou seja, 62% da atividade. O aluno nº 8 destacou-se nesse grupo, porque apresentou, principalmente, dificuldade nos algoritmos da adição e da subtração. No sexto problema (Maria ganhou 40 reais em seu aniversário e, com isso, ficou com 95 reais. Quantos reais ela tinha antes do aniversário?), misturou o esquema da adição com o da subtração. Registrou uma adição “ $40 + 95 = 45$ ”, e explicou: “Eu pensei que era de menos. Daí eu vi que não dava certo: 4 não tira 9. Daí eu fiz de mais. [...] Emprestei 1. Daí ficou 10 - na ordem das unidades. Daí eu contei. Deu 15 ( $10 + 5 = 15$ )”. Como deu 15 coloquei o 1 em cima do 4, que ficou valendo 3. Daí eu contei do 9 para o 13: é 4”.

Figura 9 - Erro de interpretação e no algoritmo cometido pelo aluno nº 8

6) Maria ganhou 40 reais em seu aniversário e, com isso, ficou com 95 reais. Quantos reais ela tinha antes do aniversário?

HHHHHHHH

$$\begin{array}{r} 40 \\ + 95 \\ \hline 145 \end{array}$$

R: Maria ficou 95 \$

Fonte: Dorne (2013)

Além de dificuldade em compreender a notação gráfica da operação, na forma vertical, um teorema-em ação pode ter levado o aluno nº 8 a colocar o minuendo no lugar do subtraendo, e vice-versa: a primeira quantidade, fornecida no enunciado, deverá ser o minuendo, e a segunda, o subtraendo. O escolar também mesclou o esquema (algoritmo) da adição com o da subtração, no décimo problema (No depósito do supermercado Bom Dia, há 408 latas de óleo. Nesta semana, 126 latas foram colocadas nas prateleiras do supermercado para serem vendidas. Quantas latas de óleo ainda têm no depósito?). Ele fez “ $126 + 408 = 1524$ ”, e forneceu a seguinte explicação: “Somei 6 mais 8, deu 14. Subiu 1 lá no 2. 12 não tinha nada para tirar. Daí ficou 2. Subi o 1. Ficou 11. 11 mais 4, deu 15”.

Figura 10 - Erro de interpretação e algoritmo cometido pelo aluno n° 8

10) No depósito do supermercado Bom Dia, há 408 latas de óleo. Nesta semana, 126 latas foram colocadas nas prateleiras do supermercado para serem vendidas. Quantas latas de óleo ainda têm no depósito?

$$\begin{array}{r} 126 \\ + 408 \\ \hline 1.524 \end{array}$$

R: *Existem 126 latas de óleo no depósito. 1.524 no depósito.*

Fonte: Dorne (2013)

Essas dificuldades foram também observadas em outros problemas. Na 11ª situação (Lucas tem 293 bois em sua fazenda. Maria tem 75 bois a menos que Lucas. Quantos bois Maria tem em sua fazenda?), o aluno n° 8 perguntou: “O 7 vai ter que emprestar ou eu vou ter que colocar primeiro o 293?” ( $75 - 293$  ou  $293 - 75$ ). Ele registrou as 5 unidades do subtraendo sob as 9 dezenas do minuendo, e as 7 dezenas do subtraendo sob as 2 centenas do minuendo (“ $293 - 75 = 543$ ”) e utilizou um teorema-em-ação: quando não há nada a ser subtraído (posição vazia em uma parcela), o resultado é o próprio número (“Não tinha nada para tirar. Fica 3. Tinha 9; tira 5, fica 4. 7 menos 2 fica 5”). Isso “Porque aqui o 2 não dava para tirar o 5”).

Figura 11 - Erro no algoritmo cometido pelo aluno nº 8

11) Lucas tem 293 bois em sua fazenda. Maria tem 75 bois a menos que Lucas. Quantos bois Maria tem em sua fazenda?

$$\begin{array}{r} 293 \\ - 75 \\ \hline 543 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 293 \\ + 75 \\ \hline 811 \end{array}$$

R: Quanto bois Maria tem 543 na fazenda.

Fonte: Dorne (2013)

A dificuldade em compreender o sistema decimal posicional levou o aluno nº 8 a cometer vários erros. No nono problema (Paula tinha 18 bombons. Ela ganhou mais alguns de sua mãe e ficou com 25. Quantos bombons Paula ganhou?), realizou “ $18 + 25 = 133$ ”, porque “Tinha 8, ganhei mais 5, daí fiquei com 13. Coloquei o 1 do lado do 1 ( $11 + 2 = 13$ ), porque se eu fosse colocar em cima do 1 não ia caber”. Nesse problema o conceito-em-ação “ganhar” foi interpretado como sinônimo de acréscimo: “Porque ela ganhou. Daí tem que ser de mais. Porque se tivesse, ela comeu, era de menos”.

No décimo problema (No depósito do supermercado Bom Dia, há 408 latas de óleo. Nesta semana, 126 latas foram colocadas nas prateleiras do supermercado para serem vendidas. Quantas latas de óleo ainda têm no depósito?), o conceito-em-ação “colocar” também foi interpretado pelo aluno nº 8 como sinônimo de acréscimo: “Porque aqui fala que foram colocadas. Por isso eu fiz de mais”.

Figura 12 - Erro de interpretação e no algoritmo cometido pelo aluno nº 8

9) Paula tinha 18 bombons. Ela ganhou mais alguns de sua mãe e ficou com 25. Quantos bombons Paula ganhou?

$$\begin{array}{r} 118 \\ + 25 \\ \hline 133 \end{array}$$

R: paula ficou 133 bombons

Fonte: Dorne (2013)

No sétimo problema (Ana tem alguns brinquedos. Bruno tem 8 brinquedos a mais que Ana. No total, Bruno tem 26 brinquedos. Quantos brinquedos tem Ana?), o aluno nº 8 explicou o resultado obtido ( $26 - 8 = 22$ ) da seguinte forma: “Eu fiz assim: tinha 8, né? Daí eu tirei 6. Daí deu 2”. Daí o 2 não dava para panhar. (ficou) 2”.

Figura 13 - Erro no algoritmo cometido pelo aluno nº 8

7) Ana tem alguns brinquedos. Bruno tem 8 brinquedos a mais que Ana. No total, Bruno tem 26 brinquedos. Quantos brinquedos tem Ana?

$$\begin{array}{r} 26 \\ - 8 \\ \hline 22 \end{array}$$

R: Ana ficou 22 brinquedos.

Fonte: Dorne (2013)

A dificuldade em compreender o sistema de numeração decimal e suas características foi um problema muito frequente entre as crianças que participaram deste estudo. O alicerce desse sistema é a base dez e, por isso, os agrupamentos são realizados de 10 em 10 (SANTANA, 2014). É por isso que dez unidades são agrupadas para formar uma dezena; dez dezenas, para formar uma centena; dez centenas, para formar um milhar etc.

O sistema decimal é composto por 10 símbolos – 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 0, que permitem construir qualquer numeral. Os símbolos têm valores distintos, dependendo de sua posição, que é quem define o seu valor, ou seja, um mesmo símbolo pode ter valores diferentes, de acordo como a posição que ocupa no numeral (FREITAS, 2014). É por isso que o sistema decimal é posicional. Por exemplo, em “333”, o primeiro 3, da direita para esquerda, representa 3 unidades simples; o 3, na segunda posição, representa 3 dezenas; e o mesmo símbolo, na terceira posição, representa 3 centenas.

[...] a regra do valor posicional, segundo o qual o valor de uma grafia está determinado pela sua posição no interior da corrente de dígitos e é produto da potenciação. Desta maneira, a lógica de um sistema posicional de base dez implica que a cada posição corresponde a uma ordem definida pela multiplicação de suas unidades por uma potência de 10, a qual se incrementa a partir do 0, cada vez que o dígito é movido uma posição para a esquerda (SEVILLA; HORMAZA, 2006, p. 409, tradução nossa).

O conhecimento do valor posicional é essencial para que uma criança consiga representar e resolver, de forma escrita, adições e subtrações. No sistema decimal, o zero é um símbolo fundamental para representar a ausência de quantidade. Por exemplo, no numeral 203, temos 2 centenas e 3 unidades. É preciso utilizar um símbolo para representar a ausência de dezenas não agrupadas em centenas e, por isso, é utilizado o zero para representar o “nada” (BRASIL, 2007).

É exigir muito das crianças que, só através da observação da representação simbólica dos números, consigam entender e analisar a necessidade de um sistema posicional. A compreensão do sistema de numeração, para o registro consciente de quantidades maiores do que 10, faz parte da construção do conceito dos números. A criança deve relacionar os símbolos 0, 1, 2, 3, 4, 5 ... 9 às quantidades que representam, ser capaz de ordenar estas quantidades, observando que o sucessor de um número tem sempre uma unidade a mais e compreender que estes mesmos algarismos são utilizados para representar todos os números naturais. Para isso, faz-se necessário um longo trabalho com material de contagem (palitos, canudinhos, pedrinhas, chapinhas, fichas, elásticos, caixinhas de vários tamanhos), com o qual ela possa fazer seus próprios agrupamentos e identificar os diferentes valores que um algarismo

pode ter, dependendo da posição que ele ocupa em um número (BRASIL, 2007, p. 14).

Muitas crianças que participaram deste estudo tiveram dificuldade de compreender o significado do número zero. Um exemplo foi o aluno nº 18, que errou oito problemas. No décimo problema (No depósito do supermercado Bom Dia, há 408 latas de óleo. Nesta semana, 126 latas foram colocadas nas prateleiras do supermercado para serem vendidas. Quantas latas de óleo ainda têm no depósito?) realizou “ $408 - 126 = 302$ ”, e disse: “Zero tira 2, dá zero”. O desconhecimento do sistema posicional levou essa criança a utilizar o seguinte teorema-em-ação: não é possível subtrair uma quantidade de zero e, por isso, o resultado é zero. A falta de conhecimento do sistema decimal dificulta a compreensão de que, como não é possível subtrair 2 dezenas de 0, é preciso decompor 1 centena em 10 dezenas para retirar as 2 dezenas.

O aluno nº 18 também demonstrou dificuldade de compreensão dos enunciados dos problemas. No oitavo problema (Em uma caixa, há 50 frutas. 23 frutas são maçãs e o restante são bananas. Quantas bananas há nessa caixa?) explicou que fez uma adição “Porque é 50 mais 23”. No décimo problema (No depósito do supermercado Bom Dia, há 408 latas de óleo. Nesta semana, 126 latas foram colocadas nas prateleiras do supermercado para serem vendidas. Quantas latas de óleo ainda têm no depósito?), fez uma adição “Porque tinha 408 mais 126”. No 11º problema (Lucas tem 293 bois em sua fazenda. Maria tem 75 bois a menos que Lucas. Quantos bois Maria tem em sua fazenda?), também realizou uma adição (“Pensei em fazer 293 mais 75”).

O aluno nº 18 utilizou um conceito-em-ação que o levou a interpretar “ganhar”, como sinônimo de acréscimo. No sexto problema (Maria ganhou 40 reais em seu aniversário e, com isso, ficou com 95 reais. Quantos reais ela tinha antes do aniversário?) disse que fez uma adição “Porque ele ganhou”. No nono problema (Paula tinha 18 bombons. Ela ganhou mais alguns de sua mãe e ficou com 25. Quantos bombons Paula ganhou?), explicou que realizou uma adição “Porque ganhou”. No sétimo problema (Ana tem alguns brinquedos. Bruno tem 8 brinquedos a mais que Ana. No total, Bruno tem 26 brinquedos. Quantos brinquedos tem Ana?), a expressão “a mais”, foi compreendida como “mais” (“Ele tem mais”).

O aluno nº 9 também errou oito problemas. Isso ocorreu, principalmente, pelo uso de conceitos-em-ação não pertinentes. Além de ter interpretado “ganhar” como sinônimo de acréscimo (6º problema – “Porque pensei que era de mais, porque ela tinha ganhado; 9º problema – “Porque ela ganhou mais, mais 25), e “a mais”, como sinônimo de mais (7º

problema – “Porque era para ver quantos brinquedos que a Ana tem. Daí eu somei”), interpretou “ter” como “total” (8º problema – “Porque tava falando que era pra saber quantos que tinha”; 10º problema – “Que era pra ver quantas latas tinha no depósito”).

Esses conceitos-em-ação são fruto da experiência escolar do aluno, pois a escola induz o aluno a interpretar “ganhar, comprar e juntar” e “perder, vender e gastar”, como palavras-chave para identificar a operação a ser realizada. Um aluno que participou do estudo de Kazakevich (2012, p. 88), por exemplo, explicou que: “Minha professora falou que quando tem ‘fugiu, sumiu, comeu, perdeu’, é de menos. ‘Voltou, chegou, ganhou’, é de mais”. Outro disse: “Aqui é de mais porque o João ganhou, ele não perdeu e nem deu”.

Três crianças apresentaram erros de interpretação, mas nenhum erro nos algoritmos (esquemas) da adição e da subtração. Elas não conseguiram identificar corretamente as operações que deveriam ser utilizadas, mas realizaram todas as operações registradas corretamente. Por exemplo, o aluno nº 11 errou seis problemas, sendo que em cinco utilizou conceitos-em-ação não pertinentes: “ganhar” como acréscimo (“Porque ela tinha 40 reais que tinha ganhado no aniversário dela”), “ter” como total, “gastar” como diminuição (“Fiz de menos por causa da palavra gastar”), “vender” como diminuição (“Ele tinha colhido algumas e hoje vendeu 110, e ficou com 85 para ele”) e “a mais” como mais (“Porque Bruno tinha 8 brinquedos a mais do que Ana, e no total ela tinha 26 brinquedos”).

A criança nº 15 também não teve dificuldade nos algoritmos (esquemas), mas cometeu erros de interpretação, por ter utilizado os seguintes conceitos-em-ação: “ganhar” como acréscimo (“Daí eu fiz de mais. Ela ganhou!”), “ganhar” como total (“Eu pensei assim: quantos que ela ganhou? Daí eu pensei: eu tenho que somar, 18 mais 25”), “a mais” como “mais” (“É 8 a mais”), e “gastar” como diminuição (“Tinha que fazer de menos, porque ela comprou e tá gastando). Além disso, ela utilizou um teorema-em-ação falso no sétimo problema (Ana tem alguns brinquedos. Bruno tem 8 brinquedos a mais que Ana. No total, Bruno tem 26 brinquedos. Quantos brinquedos tem Ana?): a primeira quantidade, citada no enunciado deverá ser o minuendo, e a segunda quantidade, o subtraendo. Disse que fez “ $8 - 26 = 22$ ”, “Porque ele – 8 – vem primeiro”.

O aluno nº 15 utilizou, também, o procedimento do complemento para resolver dois problemas de comparação. Na primeira tentativa, errou a quarta situação (Marcos tem 24 anos. Sara tem 17 anos. Quem tem mais anos? Quantos anos a mais?). Na segunda tentativa, contou nos dedos, e disse: “Ah, agora eu entendi: é 7. Porque, oh! 17, né! 18, 19, 20, 21, 22, 23 e 24, dá 7”.

Na quarta situação, o “procedimento de ‘complemento’, que consiste em buscar [...] o que é preciso acrescentar a b para encontrar c” (VERGNAUD, 2009a, p. 211) permitiu que o aluno nº 15 encontrasse o valor da relação, mas não o valor do referido, no quinto problema (Mariana tem 33 revistas. Caio tem 18 revistas a mais que Mariana. Quantas revistas tem Caio?). O escolar fez a operação “ $18 + 15 = 33$ ” e explicou: “Eu pensei assim, **contei** do 18 até o 33. Deu 15. Daí eu somei 18 mais 15. Deu 33. Caio tem 33 revistas”.

O problema de comparação é difícil para as crianças, pois exige a quantificação da comparação.

Essa dificuldade em quantificar a comparação deve-se a uma série de fatores. O mais importante deles parece ser o fato de que os alunos identificam as idéias [*sic*] de adição e subtração com mudanças nas quantidades. Como nos problemas comparativos não há mudanças nas quantidades, os alunos não conseguem raciocinar de imediato sobre as relações quantitativas envolvidas no problema (NUNES et al., 2005, p. 54).

O procedimento de complemento também pode ser utilizado para resolver problemas de busca do valor inicial de uma transformação positiva, como a sexta situação (Maria ganhou 40 reais em seu aniversário, e com isso ficou com 95 reais. Quantos reais ela tinha antes do aniversário?). Esse tipo de problema é difícil para as crianças, porque “a situação descrita no problema envolve um esquema de ação, mas a solução” requer “a aplicação do esquema inverso” (NUNES et al., 2005, p. 51). Na sexta situação, é descrita uma ação de acrescentar – Maria ganhou dinheiro – mas como o valor inicial não é apresentado, é preciso realizar uma subtração.

Para o aluno conseguir reconhecer a relação inversa entre adição e subtração, é preciso coordenar os esquemas de juntar e separar, ou seja, compreender a relação existente entre eles (NUNES et al., 2005). As crianças que não conseguem compreender essa relação, ainda podem resolver um problema de busca do valor inicial de uma transformação positiva, de forma direta, sem fazer uma subtração, por meio do procedimento de complemento.

Essa estratégia foi utilizada pelo aluno nº 6, para resolver tanto as situações de comparação quanto o de busca do valor inicial de uma transformação positiva. No quarto problema (Marcos tem 24 anos. Sara tem 17 anos. Quem tem mais anos? Quantos anos a mais?), contou, usando os dedos, do 17 (ao invés do 18) ao 24. No sétimo problema (Ana tem alguns brinquedos. Bruno tem 8 brinquedos a mais que Ana. No total, Bruno tem 26 brinquedos. Quantos brinquedos tem Ana?), somou, usando os dedos “ $17 + 8$ ”, e como o total não foi 26, somou “ $18 + 8$ ” (“Eu fui **contando** nos dedos, somei 17 mais 8. Daí vi que não



era. Faltava 1. Daí fiz 18 mais 8. Daí deu o resultado”). No sexto problema (Maria ganhou 40 reais em seu aniversário, e com isso ficou com 95 reais. Quantos reais ela tinha antes do aniversário?), fez risquinhos, do 40 ao 95, e depois contou-os, chegando ao resultado “55”.

O aluno nº 6, assim como os escolares nº 8 e nº 18 foram os únicos a utilizarem, além do algoritmo tradicional, outras formas de notação escrita, como bolinhas e risquinhos, no processo de resolução dos problemas.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O século XX foi marcado por tentativas, por meio de Reformas e de um Movimento, de melhoria do ensino da Matemática no Brasil. No final da década de 1990, o Ministério da Educação e do Desporto elaborou os Parâmetros Curriculares Nacionais, com intuito de estabelecer um referencial comum para a didática em sala de aula e para a formação escolar de todos os educandos do Brasil (BRASIL, 1997).

Isso, de fato, ainda não ocorreu. Os PCN recomendam que as situações-problema sejam o foco do ensino da Matemática, e que os diferentes significados da adição e da subtração sejam ensinados. O trabalho realizado em sala de aula com os participantes deste estudo demonstrou que isso não estava sendo feito. Tanto os cadernos escolares quanto o livro didático continham problemas que envolviam apenas as ideias mais simples da adição, ou seja, de juntar e de acrescentar.

Considerando que a mediação do professor deve ocorrer, necessariamente, por meio das situações, pois são elas que tornam os conceitos significativos (VERGNAUD, 2009b), a pequena quantidade e a pouca diversidade de problemas trabalhados em sala de aula certamente foi um dos fatores que prejudicou o desenvolvimento do campo conceitual aditivo dos alunos que participaram deste estudo.

Em uma situação, um conceito nunca aparece isolado e, por isso, é preciso que o professor esteja atento ao campo conceitual do qual ele faz parte. No caso dos participantes desta pesquisa, a dificuldade em compreender o conceito de sistema decimal posicional interferiu na aprendizagem dos algoritmos (esquemas) da adição e da subtração.

Para analisar as situações, o aluno precisa usar invariantes operatórios, ou seja, teoremas-em-ação e conceitos-em-ação. Esses conhecimentos implícitos são formados a partir da experiência na vida diária e, principalmente na escola. O que pode ser constatado, a partir das ações nas situações e das falas das crianças sobre as suas produções, é que a prática da

escola de ensinar palavras-chave para a identificação das operações a serem utilizadas na resolução dos problemas, tem contribuído para a formação de conceitos-em-ação que prejudicam a interpretação dos problemas, pois levam o aluno a acreditar que, por exemplo, “gastar” sempre indica decréscimo.

O desenvolvimento do campo conceitual aditivo requer, também, que o professor compreenda os conceitos-em-ação e os teoremas-em-ação de seus educandos. A pouca atenção dos professores às ações realizadas e compreendidas pelo aluno, não favorecem a transformação dos seus conceitos-em-ação e teoremas-em-ação em conhecimentos explícitos.

A escola tem sido, há muito tempo, criticada pelo ensino mecânico da Matemática, como, no caso dos algoritmos da adição e da subtração. O aluno de ontem sabia fazer, mecanicamente, uma adição de “vai 1”, ou seja, com reagrupamento, mas não entendia o que era esse “1”. Os participantes deste estudo demonstraram que continuam a não saber o que é esse “1”, mas agora misturam as regras dos algoritmos (esquemas) da adição e da subtração e, por isso, fazem o “vai 1” e o “empresta 1” em uma mesma operação.

Um conceito é formado por um conjunto de representações simbólicas. Este é outro aspecto que precisa ser repensado pela escola que, ainda hoje, insiste em ensinar apenas uma única forma de resolução dos problemas, ou seja, por meio dos algoritmos tradicionais. Neste estudo, entre os 21 participantes, apenas 3 utilizaram outras notações escritas (bolinhas e risquinhos) no processo de resolução das situações. As representações simbólicas permitem representar os problemas, assim como os procedimentos para lidar com eles e, por isso, “expressões simbólicas, diagramas e tabelas [...] são muito eficazes” [...] porque permitem que os alunos esqueçam-se de “características não-essenciais da situação [...]” e concentrem-se nos “elementos e inter-relações relevantes” (MAGINA et al., 2001, p. 16).

Faltam aos professores conhecimentos para, de fato, contribuir para o desenvolvimento dos campos conceituais de seus alunos. Mudar essa situação requer, necessariamente, repensar e modificar a formação que está sendo oferecida aos pedagogos, nos cursos de graduação do país.

## REFERÊNCIAS

- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática**. Brasília, DF, 1997. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>>. Acesso em: 14 fev. 2014.
- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Pró-Letramento Matemática**. Brasília, DF, 2007.
- BURIGO, E. Z. **Movimento da Matemática Moderna no Brasil**: estudo da ação e do pensamento de educadores matemáticos nos anos 80. 1989. 266 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1989.
- CAMPOS, T. M. M.; MAGINA, S. M. P. Concepções e desempenho de professores das séries iniciais no campo das estruturas aditivas. In: ENCONTRO PAULISTA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7. São Paulo. **Anais...** São Paulo, 2004. p. 1-11.
- CARVALHO, J. B. P. de et al. Euclides Roxo e o movimento de reforma do ensino de matemática na década de 30. **Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos**, Brasília, v. 81, n. 199, p. 415-424, 2000.
- DORNE, S. R. **Resolução de problemas matemáticos por alunos respiradores orais**. 2013. 128 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2013.
- FERNANDES, G. P.; MENEZES, J. E. O movimento da educação matemática no Brasil: cinco décadas de existência. In: CONGRESSO DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE HISTÓRIA DA EDUCAÇÃO. **Anais...** 2004. Disponível em: <<http://sbhe.org.br/novo/congressos/cbhe2/pdfs/Tema2/0204.pdf>>. Acesso em: 20 fev. 2014.
- FERREIRA, M. de M.; PINTO, S. C. S. **A crise dos anos 20 e a revolução de trinta**. Rio de Janeiro: CPDOC, 2006.
- FREITAS, S. B. L. de. A criança ativa na construção do número no SND. In: BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. Salto para o futuro. **Sistema de numeração decimal no ciclo de alfabetização**. Brasília, DF, 2014. p. 14-21.
- GOMES, M. L. M. **História do ensino da Matemática**: uma introdução. Belo Horizonte: CAED/UFMG, 2012.
- KAZAKEVICH, J. G. **O desempenho de alunos respiradores orais em problemas aditivos**. 2012. 110 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2012.
- MACHADO, H. M.; KAJIHARA, O. T. **Problemas do tipo aditivo em livros didáticos**. Relatório final de pesquisa de iniciação científica. Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2014.

MAGINA, S. et al. **Repensando adição e subtração**: contribuições da teoria dos campos conceituais. São Paulo: PROEM, 2001.

MAGINA, S. et al. As estratégias de resolução de problemas das estruturas aditivas nas quatro primeiras séries do Ensino Fundamental. **Zetetiké: Revista de Educação Matemática**, v. 18, n. 34, p.15-49, 2010.

MORALES, C. et al. **Uma história da educação matemática no Brasil através dos livros didáticos de matemática dos anos finais do Ensino Fundamental**. 2004. 169 f. Monografia (Especialização em Metodologia do Ensino- Aprendizagem da Matemática no Processo Educativo) - Faculdade de Educação São Luís, Jaboicabal, 2003. Disponível em: <[http://educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos\\_teses/MATEMATICA/Monografia\\_Morales.pdf](http://educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/MATEMATICA/Monografia_Morales.pdf)> Acesso em: 20 fev. 2014.

MOREIRA, M. A. A Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área. **Investigações em Ensino de Ciências**, Porto Alegre, v. 7, n. 1, p. 7-29, 2002. Disponível em:< [http://www.if.ufrgs.br/ienci/artigos/Artigo\\_ID80/v7\\_n1\\_a2002.pdf](http://www.if.ufrgs.br/ienci/artigos/Artigo_ID80/v7_n1_a2002.pdf)>. Acesso em: 05 mar. 2014.

MUNIZ, C. A. O conceito de “esquema” para um novo olhar para a produção matemática na escola: as contribuições da Teoria dos Campos Conceituais. In: BITTAR, M.; MUNIZ, C. A. (Org.). **A aprendizagem da matemática na perspectiva da teoria dos campos conceituais**. Curitiba: CRV, 2009. p. 37-52.

MUNIZ, C. A. A criança se percebendo como construtora do Sistema de Numeração Decimal. In: BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. Salto para o futuro. **Sistema de numeração decimal no ciclo de alfabetização**. Brasília, DF, 2014. p. 37-48.

NOGUEIRA, C. M. I. Introdução à educação matemática. In: ANDRADE, D.; NOGUEIRA, C. M. I. (Org.). **Educação matemática e as operações fundamentais**. Maringá: EDUEM, 2005. p. 11-40.

NUNES, T. et al. **Educação Matemática**: números e operações numéricas. São Paulo: Cortez Editora, 2005.

PAIS, L. C. Formação de conceitos e os campos conceituais. In: PAIS, L. C. **Didática da matemática**: uma análise da influência francesa. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2011. p. 51 - 63.

SANTANA, E. SND: conceitos matemáticos articulados com atividades pedagógicas. In: BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. Salto para o futuro. **Sistema de numeração decimal no ciclo de alfabetização**. Brasília, DF, 2014. p. 49-54.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. **Relatório pedagógico 2011 SARESP - Matemática**. São Paulo: VUNESP, [2012?].

SEVILLA, Y. O.; HORMAZA. M. O. ¿Por qué 7345 se lee como "setenta y tres cuarenta y cinco"? **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, México, v. 9, n. 3, p. 407-433, 2006.

SOARES, F. dos S.; DASSIE, B. A.; ROCHA, J. L. da. Ensino de matemática no século XX: da Reforma Francisco Campos à matemática moderna. **Horizontes**, Bragança Paulista, v. 22, n. 1, p. 7-15, 2004.

SOUZA, G. M. **Felix Klein e Euclides Roxo**: debates sobre o ensino da matemática no começo do século XX. 2010. 71 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2010.

VARGAS, F. L. S.; KAJIHARA, O. T. **Elaboração de problemas aditivos por alunos do Curso de Pedagogia**. Relatório final de pesquisa de iniciação científica. Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2013.

VERGNAUD, G. **Teoria dos campos conceituais**. Palestra proferida no I Seminário Internacional de Educação Matemática, Porto Alegre, 1993.

VERGNAUD, G. A trama dos campos conceituais na construção dos conhecimentos. **Revista do GEMPA**, Porto Alegre, n. 4, p. 9-19, 1996.

VERGNAUD, G. A gênese dos campos conceituais. In: GROSSI, E. P. **Por que ainda há quem não aprende?** A teoria. Petrópolis: Vozes, 2003.

VERGNAUD, G. Os problemas de tipo aditivo. In: VERGNAUD, G. **A criança, a matemática e a realidade**: problemas de ensino da matemática na escola elementar. Curitiba: Ed. da UFPR, 2009a. p. 197-222.

VERGNAUD, G. O que é aprender? In: BITTAR, M.; MUNIZ, C. A. (Org.). **A aprendizagem matemática na perspectiva da teoria dos campos conceituais**. Curitiba: CRV, 2009b. p. 13-35.

VERGNAUD, G. O longo e o curto prazo na aprendizagem da matemática. **Educar em Revista**, Curitiba, n. 1, p. 15-27, 2011.

WERNECK, A. P. T. **Euclides Roxo e a reforma Francisco Campos**: a gênese do primeiro programa de ensino de matemática brasileiro. 2003. 122 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2003.